1. Przykłady grup i podstawowe pojęcia

Teoria grup jest jest jednym z głównych działów współczesnej algebry. Jej początki, datowane na pierwszą połowę XIX wieku, powiązane były z pracami młodego matematyka francuskiego E. Galois, który wprowadził termin grupy w kontekście badań nad permutacjami zbiorów pierwiastków wielomianów.

W tym rozdziale przedstawiamy naturalne przykłady grup i definiujemy wstępne pojęcia.

Grupą nazywamy niepusty zbiór G z dwuargumentowym działaniem $\circ\colon G \times G \to G$, spełniającym następujące warunki:

(a) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$, dla dowolnych $a, b, c \in G$ (warunek łączności),

(b) istnieje element $e \in G$, że $a \circ e = e \circ a = a$ dla dowolnego $a \in G$ (istnienie elementu neutralnego),

(c) dla każdego $a \in G$ istnieje taki element $b \in G$, że $a \circ b = b \circ a = e$ (istnienie elementu odwrotnego).

Z łatwością można wywnioskować, że każda grupa ma dokładnie jeden element neutralny oraz, że każdy element posiada dokładnie jeden element odwrotny, który na ogół jest oznaczany przez a^{-1} (lub $-a$, gdy dla działania stosujemy notację addytywną, tzn. $\circ = +$). Warunek łączności gwarantuje poprawność następującej notacji potęgowej:

$$\underbrace{a \circ a \circ \cdots \circ a}_{n \text{ razy}} = a^n.$$

Jeżeli G ma skończenie wiele elementów, to ich liczbę oznaczamy przez $|G|$ i nazywamy **rzędem** grupy G. Jeżeli $g \in G$ i istnieje taka liczba naturalna n, że $g^n = e$, to najmniejszą liczbę o tej własności nazywamy **rzędem elementu** g i oznaczamy $o(g)$. O elementach nieposiadających rzędu skończonego mówimy, że mają rząd nieskończony. Jeżeli w grupie G zachodzi warunek przemienności $a \circ b = b \circ a$ dla dowolnych $a, b \in G$, to G nazywana jest **grupą abelową**.

Działania w skończonej grupie G można opisać za pomocą tabelki, której wiersze i kolumny są ponumerowane elementami grupy, zaś w pozycji (g, h) występuje element $g \circ h$. Jeżeli $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, to tabelka działania $\circ$ w G ma postać Tabeli 1.1.

Tabela 1.1. Tabelka działania $\circ$ w grupie G

$\circ$	g_1	$\dots$	g_j	$\dots$	g_n
g_1	$g_1 \circ g_1$	$\dots$	$g_1 \circ g_j$	$\dots$	$g_1 \circ g_n$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
g_i	$g_i \circ g_1$	$\dots$	$g_i \circ g_j$	$\dots$	$g_i \circ g_n$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
g_n	$g_n \circ g_1$	$\dots$	$g_n \circ g_j$	$\dots$	$g_n \circ g_n$

Przykłady

1. Grupy liczbowe. Zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem dodawania i elementem neutralnym 0 jest grupą abelową. Podobnie zbiory liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ oraz liczb zespolonych $\mathbb{C}$ z działaniami dodawania liczb są grupami abelowymi. Nazywa się je odpowiednio addytywnymi grupami liczb wymiernych, rzeczywistych i zespolonych.

Zbiory $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ z działaniem mnożenia i elementem neutralnym 1 są grupami abelowymi, zwanymi grupami multiplikatywnymi ciał liczb wymiernych, rzeczywistych i zespolonych, odpowiednio.

2. Grupy permutacji. Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Przypomnijmy, że bijekcją zbioru X nazywamy dowolną funkcję $f\colon X \to X$, która jest różnowartościowa i odwzorowuje X na X, to znaczy obraz $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in X\}$ pokrywa się ze zbiorem X. Każda bijekcja posiada funkcję odwrotną $f^{-1}\colon X \to X$ taką, że

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X,$$

gdzie $\circ$ oznacza składanie funkcji, zaś id_X jest funkcją identycznościową (tzn. $\mathrm{id}_X(x) = x$ dla dowolnego $x \in X$). Ponieważ składanie funkcji jest operacją łączną zbiór S_X wszystkich bijekcji zbioru X, z działaniem składania funkcji jest grupą. Nazywamy ją **grupą permutacji** zbioru X. W przypadku gdy X ma $n \geqslant 2$ elementów można jego elementy nazwać kolejnymi liczbami naturalnymi, tzn. $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Grupę S_X oznaczamy wówczas przez S_n i nazywamy **grupą symetryczną stopnia** n. Elementy grupy symetrycznej zapisujemy w postaci dwuwierszowej tablicy:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}.$$

Z łatwością stwierdzamy, że $|S_n| = n!$ i dla $n \geqslant 3$ grupy S_n są nieabelowe.